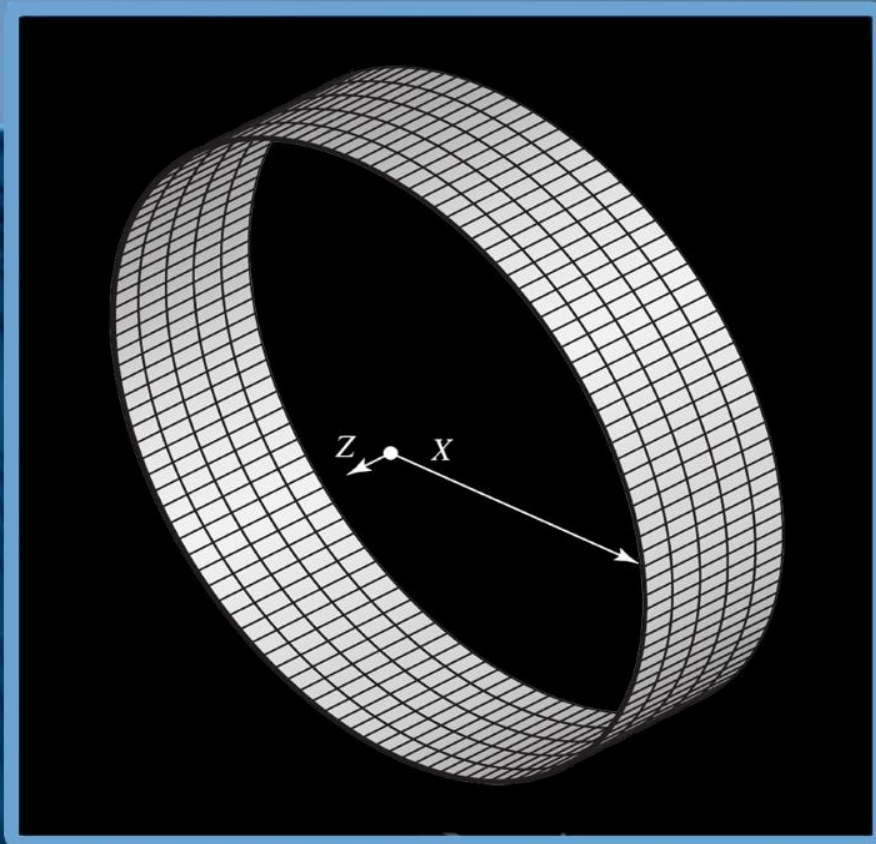


فصل پنجم



المان‌های خمشی

مبانی تحلیل اجزاء محدود، تألیف دیوید هاتن، ترجمه شهاب الدین حاتمی و همکاران

مرجع اصلی:

فهرست مطالب

- مقدمه
- تئوری مقدماتی تیر
- المان خمشی
- ماتریس سختی المان خمشی
- بردار نیروی المان
- کار معادل برای بارهای گسترده
- المان خمشی با بارگذاری محوری
- المان تیر سه بعدی کلی

مقدمه

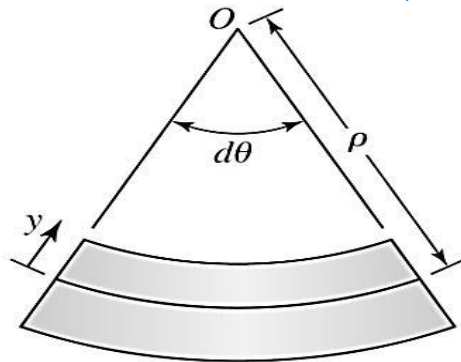
المان میله، المان یک بعدی و تنها تحت بارگذاری محوری است که :

- ❖ مناسب برای تحلیل پاسخ سازه ها تنها در شرایط بارگذاری محوری
- ❖ عدم توانایی در انتقال اثرات خمش
- ❖ عدم کارایی در سازه هایی با اتصالات گیردار به صورت جوش و یا پیچ

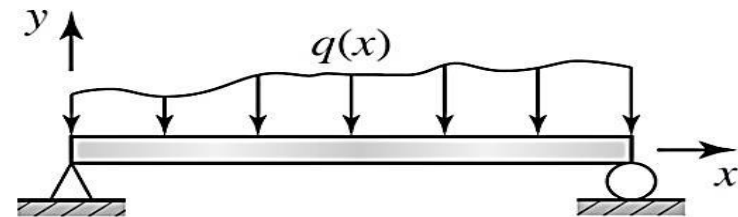
المان خمشی (تیر):

- ❖ المان خطی (یک بعدی) قادر به توصیف اثرات خمش عرضی

تئوری مقدماتی تیر



(ب)



(الف)



(ج)

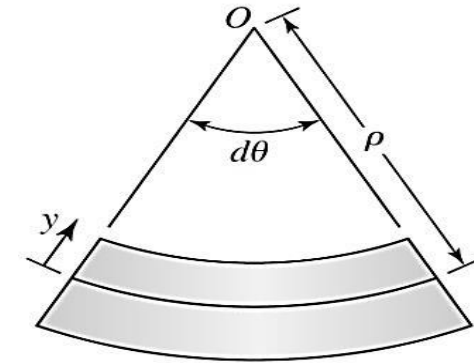
(الف) تیر با تکیه گاه های ساده تحت بار گسترده. (ب) المان تیر تغییر شکل داده. (ج)

قرارداد علامت برای نیروی برشی و لنگر خمشی

تئوری مقدماتی تیر

$$ds = (\rho - y)d\theta$$

$$\varepsilon_x = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho}$$



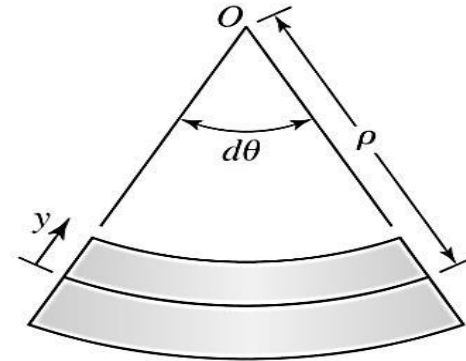
بر اساس حساب دیفرانسیل، شعاع انحنای یک منحنی دو بعدی با رابطه زیر تعیین می شود:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2v}{dx^2}}$$

که $v = v(x)$ بیان کننده منحنی تغییر شکل سطح خنثی می باشد.

تئوری مقدماتی تیر

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 v}{dx^2}}$$



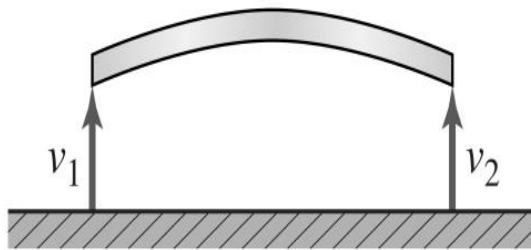
$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$$

بنابراین کرنش نرمال ناشی از خمش در جهت محور طولی به صورت روبرو به دست می آید:

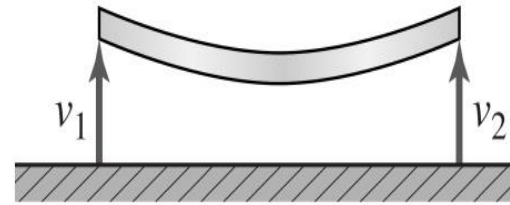
$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -E y \frac{d^2 v}{dx^2}$$

و تنش نرمال نظیر برابر است با:

توابع درونیاب



(ب)



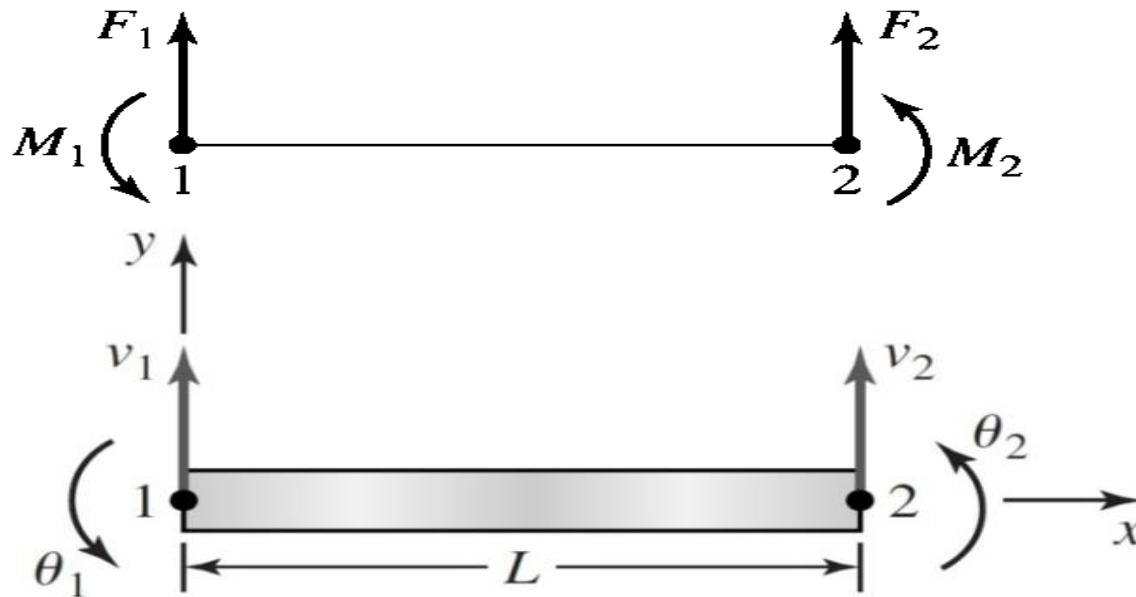
(الف)



(ج)

(الف) و (ب) المان های تیر با جابجایی های انتهایی یکسان اما با فرم تغییر شکل کاملاً متفاوت. (ج) پیوستگی غیر قابل قبول از نظر فیزیکی در گره اتصال

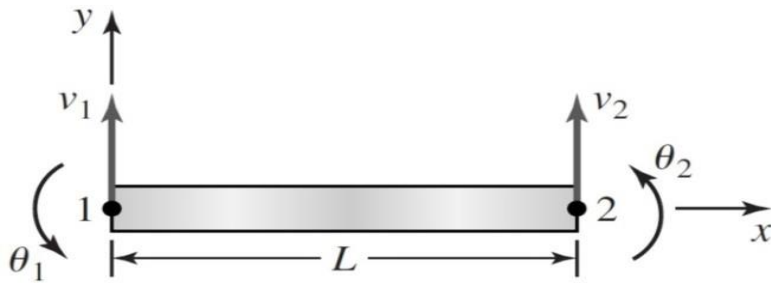
توابع درونیاب



جابجایی های گرهی المان تیر نشان داده شده در جهت مثبت

$$v(x) = f(v_1, v_2, \theta_1, \theta_2, x)$$

توانع درونیاب



$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$v(x=0) = v_1 = a_0$$

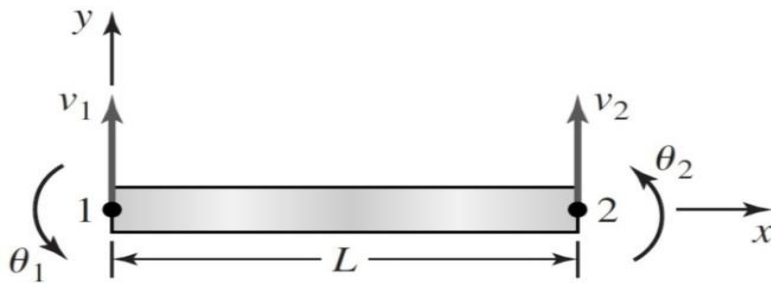
که شرایط مرزی مربوطه عبارتند از:

$$v(x=L) = v_2 = a_0 + a_1L + a_2L^2 + a_3L^3$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1 = a_1$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = \theta_2 = a_1 + 2a_2L + 3a_3L^2$$

توانع درونیاب



$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$a_0 = v_1$$

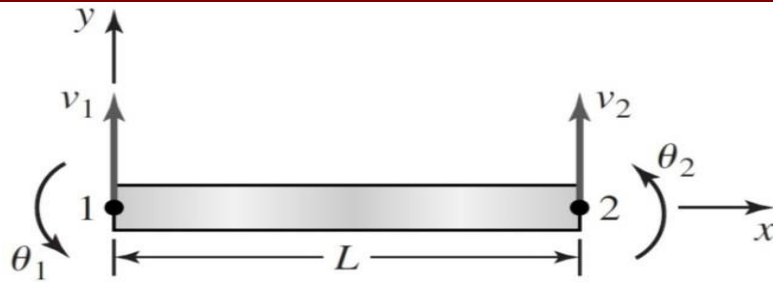
$$a_1 = \theta_1$$

$$a_2 = \frac{3}{L^2}(v_2 - v_1) - \frac{1}{L}(2\theta_1 + \theta_2)$$

$$a_3 = \frac{2}{L^3}(v_1 - v_2) + \frac{1}{L^2}(\theta_1 + \theta_2)$$

با حل همزمان روابط قبل، ضرایب بر حسب متغیرهای گرهی به صورت زیر حاصل می شوند.

توابع درونیاب



$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)v_1 + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_1 + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)v_2 + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right)\theta_2$$

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}$$

توابع درون یاب یا توابع شکل در فرم نرمال شده:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad v(x) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_1 + L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\theta_1 + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_2 + L\xi^2(\xi - 1)\theta_2$$

محاسبه تنش در المان

$$\sigma_x(x, y) = -yE \frac{d^2[N]}{dx^2} \{\delta\}$$

$$\sigma_x(x) = y_{\max} E \frac{d^2[N]}{dx^2} \{\delta\}$$

$$\sigma_x(x) = y_{\max} E \left[\left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) v_1 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \theta_1 + \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) v_2 + \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right) \theta_2 \right]$$

$$\sigma_x(x=0) = y_{\max} E \left[\frac{6}{L^2} (v_2 - v_1) - \frac{2}{L} (2\theta_1 + \theta_2) \right]$$

$$\sigma_x(x=L) = y_{\max} E \left[\frac{6}{L^2} (v_1 - v_2) + \frac{2}{L} (2\theta_2 + \theta_1) \right]$$

ماتریس سختی المان خمشی

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV$$

که V حجم کل المان است. با جایگذاری روابط تنش و کرنش از روابط (۴-۵) و (۴-۶)، داریم:

$$U_e = \frac{E}{2} \int_V y^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dV$$

که آن را می توان به صورت زیر نوشت:

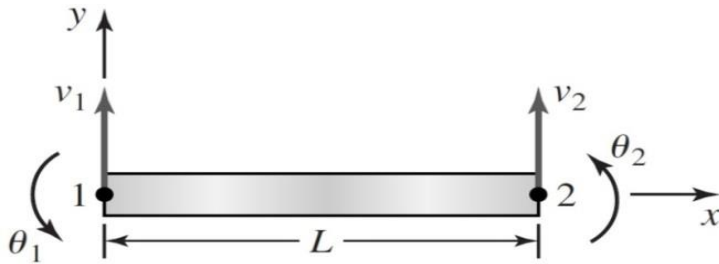
$$U_e = \frac{E}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \left(\int_A y^2 dA \right) dx$$

با علم به این که انتگرال سطح بیانگر ممان اینرسی I_z حول محور مرکزی عمود بر صفحه خمش

می باشد، نتیجه می شود که:

$$U_e = \frac{EI_z}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$$

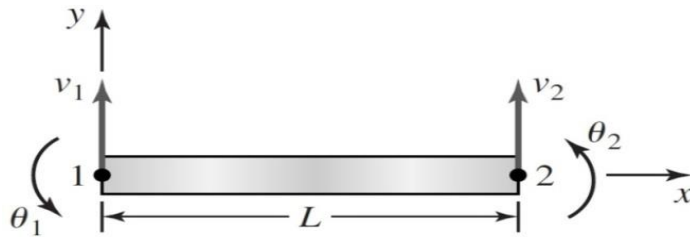
ماتریس سختی المان خمشی



$$U_e = \frac{EI_z}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial v_1} = F_1 = EI_z \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx$$

ماتریس سختی المان خمشی



و با بکار بردن این قضیه نسبت به جابجایی دورانی، لنگر در این گره به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{\partial U_e}{\partial \theta_1} = M_1 = EI_z \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx$$

به طور مشابه برای گره ۲، نیروی عرضی و لنگر به صورت زیر به دست می آیند:

$$\frac{\partial U_e}{\partial v_2} = F_2 = EI_z \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial \theta_2} = M_2 = EI_z \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx$$

ماتریس سختی المان خمشی

$$\frac{\partial U_e}{\partial v_1} = F_1 = EI_z \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4}{dx^2} \theta_2 \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx$$

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

k_{mn} که در آن $m, n = 1, 4$ می باشند، درایه های ماتریس سختی المان هستند.

مشاهده می شود که:

$$k_{mn} = k_{nm} = EI_z \int_0^L \frac{d^2 N_m}{dx^2} \frac{d^2 N_n}{dx^2} dx \quad n, m = 1, 4$$

ماتریس سختی المان خمشی

با توجه به اینکه المان الاستیک خطی است، مطابق انتظار ماتریس سختی المان متقارن است.

قبل از محاسبه درایه های ماتریس، بهتر است که انتگرال فوق با استفاده از متغیر طولی بی بعد $\xi = \frac{x}{L}$ به صورت زیر تبدیل شود:

$$\int_0^L f(x) dx = \int_0^1 f(\xi) L d\xi$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d}{d\xi}$$

$$k_{mn} = k_{nm} = EI_z \int_0^L \frac{d^2 N_m}{dx^2} \frac{d^2 N_n}{dx^2} dx = \frac{EI_z}{L^3} \int_0^1 \frac{d^2 N_m}{d\xi^2} \frac{d^2 N_n}{d\xi^2} d\xi \quad m, n = 1, 4$$

ماتریس سختی المان خمشی

$$v(x) = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_1 + L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\theta_1 + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_2 + L\xi^2(\xi - 1)\theta_2$$

سیس ضرایب سختی را می توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{EI_z}{L^3} \int_0^1 (12\xi - 6)^2 d\xi = \frac{36EI_z}{L^3} \int_0^1 (4\xi^2 - 4\xi + 1) d\xi \\ &= \frac{36EI_z}{L^3} \left(\frac{4}{3} - 2 + 1 \right) = \frac{12EI_z}{L^3} \end{aligned}$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{EI_z}{L^3} \int_0^1 (12\xi - 6)(6\xi - 4)L d\xi = \frac{6EI_z}{L^2}$$

$$k_{13} = k_{31} = \frac{EI_z}{L^3} \int_0^1 (12\xi - 6)(6 - 12\xi) d\xi = -\frac{12EI_z}{L^3}$$

$$k_{14} = k_{41} = \frac{EI_z}{L^3} \int_0^1 (12\xi - 6)(6\xi - 2)L d\xi = \frac{6EI_z}{L^2}$$

ماتریس سختی المان خمشی

با ادامه روند انتگرال گیری، ضرایب سختی باقیمانده به صورت زیر به دست می آیند:

$$k_{22} = \frac{4EI_z}{L}$$

$$k_{33} = \frac{12EI_z}{L^3}$$

$$k_{23} = k_{32} = -\frac{6EI_z}{L^2}$$

$$k_{34} = k_{43} = -\frac{6EI_z}{L^3}$$

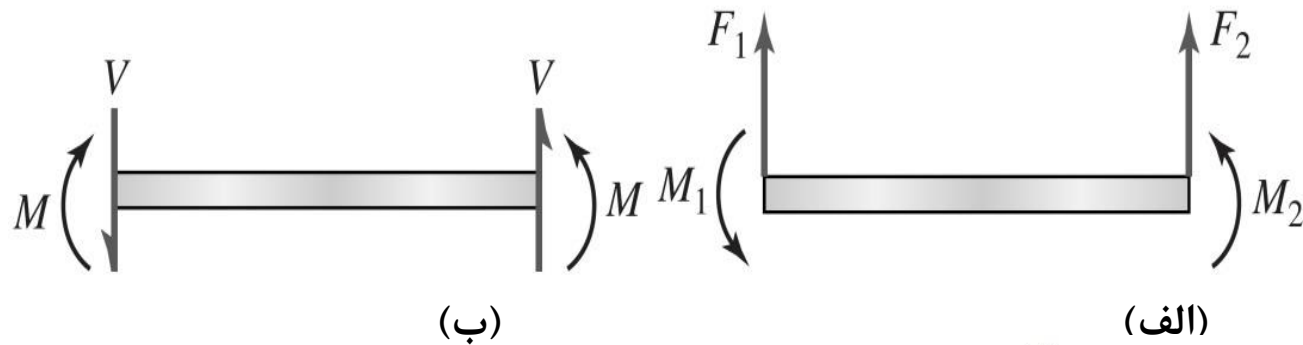
$$k_{24} = k_{42} = \frac{2EI_z}{L}$$

$$k_{44} = \frac{4EI_z}{L}$$

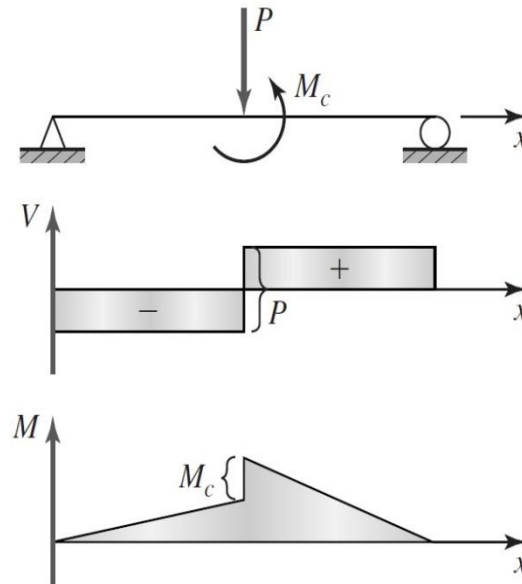
در نهایت ماتریس سختی کامل شده برای المان خمشی مطابق زیر حاصل می گردد:

$$[k_e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

بردار نیروی المان



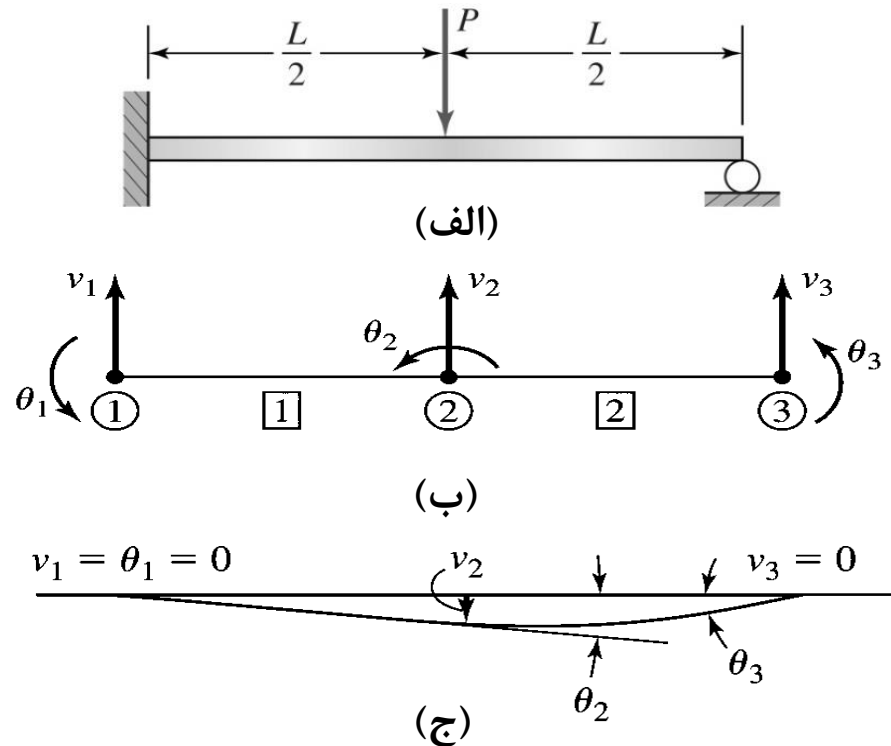
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -V_1 \\ -M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$



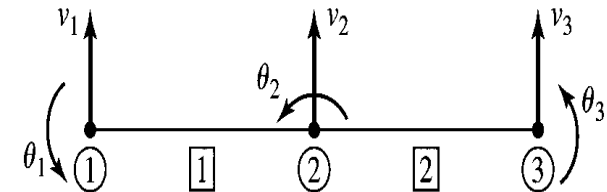
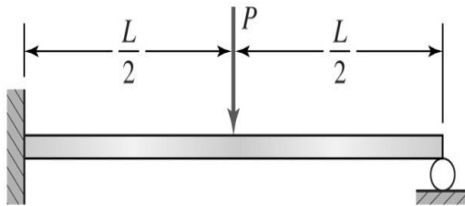
(الف) قرارداد مثبت نیروهای گرهی. (ب) قرارداد مثبت بر اساس تئوری مقاومت مصالح. (ج) دیاگرام های برش و لنگر خمشی برای نشان دادن تاثیرات بار متمرکز.

مثال

شکل یک تیر نامعین استاتیکی را نشان می دهد که نیروی P بر وسط دهانه آن اعمال شده است. با استفاده از دو المان خمشی، مقدار تغییر شکل وسط دهانه را به دست آورید.



(الف) تیر بارگذاری شده (ب) اسم گذاری جابجایی ها و المان ها. (ج) جابجایی



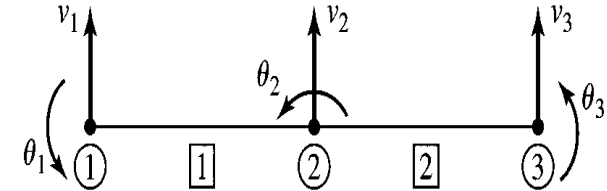
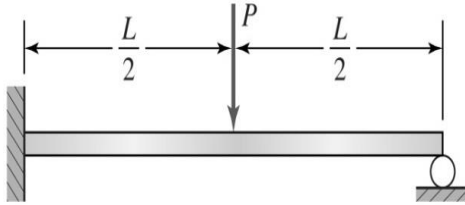
حل

$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = \frac{EI_z}{(L/2)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L/2 & -12 & 6L/2 \\ 6L/2 & 4L^2/4 & -6L/2 & 2L^2/4 \\ -12 & -6L/2 & 12 & -6L/2 \\ 6L/2 & 2L^2/4 & -6L/2 & 4L^2/4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{8EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L \\ 3L & L^2 & -3L & L^2/2 \\ -12 & -3L & 12 & -3L \\ 3L & L^2/2 & -3L & L^2 \end{bmatrix}$$

جدول ۴-۱: تناظر جابجایی المانی با جابجایی سیستم

المان ۲	المان ۱	جابجایی کلی
۰	۱	۱
۰	۲	۲
۱	۳	۳
۲	۴	۴
۳	۰	۵
۴	۰	۶



با استفاده از جدول تناظر جابجایی (و با استفاده از خاصیت تقارن)، مونتاژ ماتریس سختی المان به صورت زیر انجام می گیرد.

$$K_{11} = k_{11}^{(1)} = \frac{96EI_z}{L^3}$$

$$K_{12} = k_{12}^{(1)} = \frac{24EI_z}{L^2}$$

$$K_{13} = k_{13}^{(1)} = \frac{-96EI_z}{L^3}$$

$$K_{14} = k_{14}^{(1)} = \frac{24EI_z}{L^2}$$

$$K_{22} = k_{22}^{(1)} = \frac{8EI_z}{L^3}$$

$$K_{23} = k_{23}^{(1)} = \frac{-24EI_z}{L^2}$$

$$K_{24} = k_{24}^{(1)} = \frac{4EI_z}{L}$$

$$K_{25} = K_{26} = 0$$

$$K_{33} = k_{33}^{(1)} + k_{11}^{(2)} = \frac{192EI_z}{L^3}$$

$$K_{34} = k_{34}^{(1)} + k_{12}^{(2)} = 0$$

$$K_{35} = k_{13}^{(2)} = \frac{-96EI_z}{L^3}$$

$$K_{36} = k_{14}^{(2)} = \frac{24EI_z}{L^2}$$

$$K_{44} = k_{44}^{(1)} + k_{22}^{(2)} = \frac{16EI_z}{L}$$

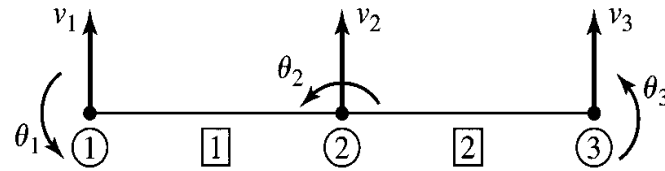
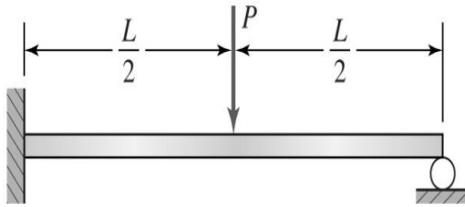
$$K_{45} = k_{23}^{(2)} = \frac{-24EI_z}{L^2}$$

$$K_{46} = k_{24}^{(2)} = \frac{4EI_z}{L}$$

$$K_{55} = k_{33}^{(2)} = \frac{96EI_z}{L^3}$$

$$K_{56} = k_{34}^{(2)} = \frac{-24EI_z}{L^2}$$

$$K_{66} = k_{44}^{(2)} = \frac{8EI_z}{L}$$



$$[K]\{U\} = \{F\}$$

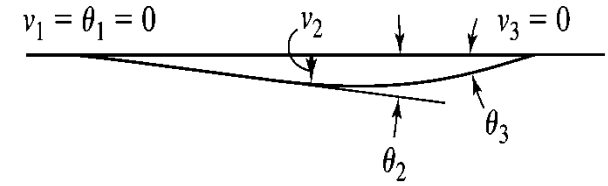
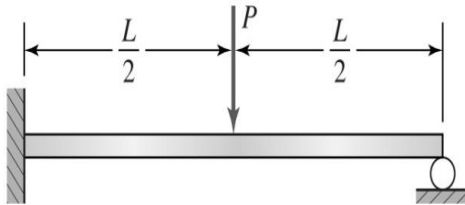
با استفاده از فرم کلی مقابل

و با جایگذاری مقادیر محاسبه شده در این فرم کلی، معادلات سیستم را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 96 & 24L & -96 & 24L & 0 & 0 \\ 24L & 8L^2 & -24L & 4L^2 & 0 & 0 \\ -96 & -24L & 192 & 0 & -96 & 24L \\ 24L & 4L^2 & 0 & 16L^2 & -24L & 4L^2 \\ 0 & 0 & -96 & -24L & 96 & 24L \\ 0 & 0 & 24L & 4L^2 & 24L & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

با اعمال شرایط مرزی $v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$ معادلات به شکل زیر کاهش می یابند:

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 192 & 0 & 24L \\ 0 & 16L^2 & 4L^2 \\ 24L & 4L^2 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



که از آن جابجایی های گرهی به صورت زیر حاصل می شوند

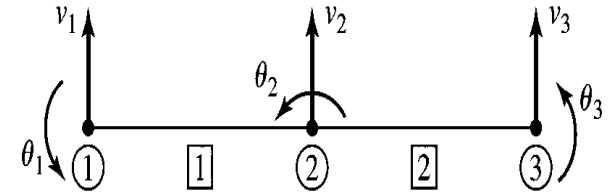
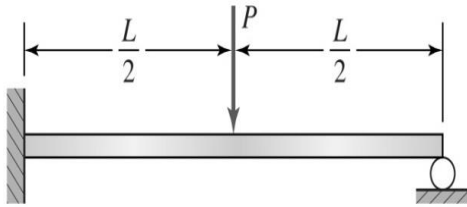
$$v_2 = \frac{-7PL^3}{768EI_z} \quad \theta_2 = \frac{-PL^2}{128EI_z} \quad \theta_3 = \frac{PL^2}{32EI_z}$$

شکل تغییرشکل یافته ی تیر به همراه وضعیت تغییرشکل نیافته و جابجایی های ذکر شده در شکل نشان داده شده اند. با جایگذاری مقادیر جابجایی های گرهی در معادلات مقید، عکس العمل ها به صورت زیر به دست می آیند.

$$F_1 = \frac{EI_z}{L^3} (-96v_2 + 24L\theta_2) = \frac{11P}{16}$$

$$F_3 = \frac{EI_z}{L^3} (-96v_2 - 24L\theta_2 - 24L\theta_3) = \frac{5P}{16}$$

$$M_1 = \frac{EI_z}{L^3} (-24Lv_2 + 4L^2\theta_2) = \frac{3PL}{16}$$



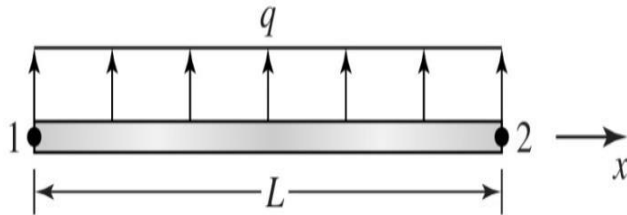
با کنترل شرایط تعادل کلی برای تیر خواهیم یافت که

$$\sum F_y = \frac{11P}{16} - P + \frac{5P}{16} = 0$$

و با برآیندگیری لنگر حول گره ۱، داریم

$$\sum M = \frac{3PL}{16} - P \frac{L}{2} + \frac{5P}{16} L = 0$$

بنابراین جواب المان محدود شرایط تعادل کلی را ارضا می کند.



کار معادل برای بارهای گسترده

$$W = \int_0^L q(x) v(x) dx$$

در اینجا هدف این است که نیروهای گرهی معادل طوری تعیین شوند که کار انجام شده توسط آنها با کار یکسان باشد، در این صورت باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$W = \int_0^L q(x) v(x) dx = F_{1q} v_1 + M_{1q} \theta_1 + F_{2q} v_2 + M_{2q} \theta_2$$

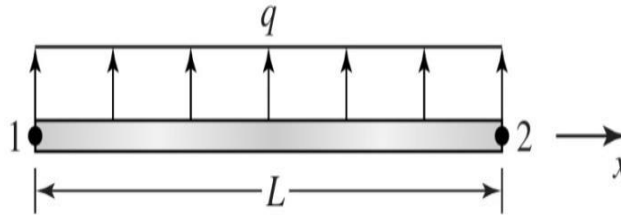
F_{1q} و F_{2q} : به ترتیب نیروهای معادل در گره های ۱ و ۲

M_{1q} و M_{2q} : لنگرهای گرهی معادل

با جایگذاری تابع جابجایی گسسته، انتگرال کار به صورت زیر تبدیل می شود:

$$W = \int_0^L q(x) [N_1(x) v_1 + N_2(x) \theta_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x) \theta_2] dx$$

کار معادل برای بارهای گسترده



$$F_{1q} = \int_0^L q(x) N_1(x) dx$$

$$M_{1q} = \int_0^L q(x) N_2(x) dx$$

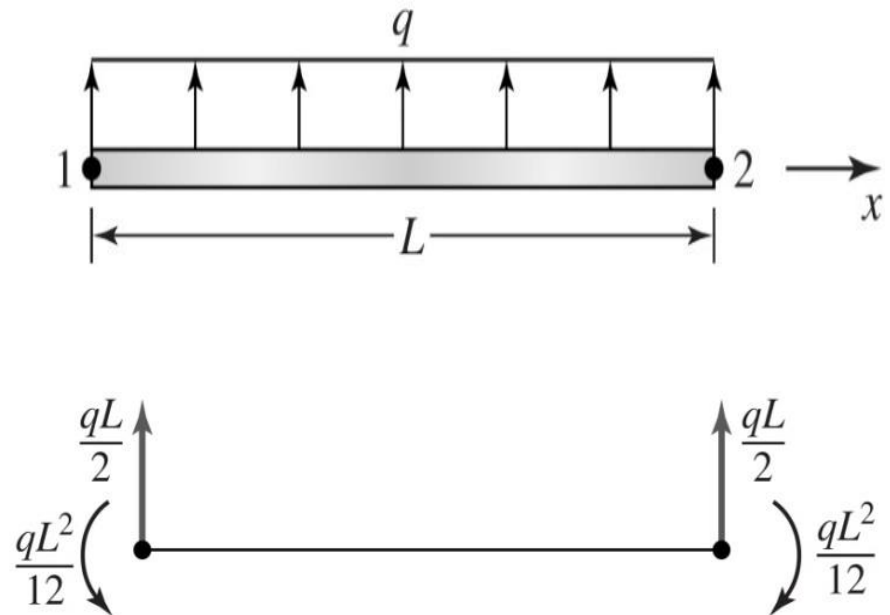
$$F_{2q} = \int_0^L q(x) N_3(x) dx$$

$$M_{2q} = \int_0^L q(x) N_4(x) dx$$

کار معادل برای بارهای گسترده

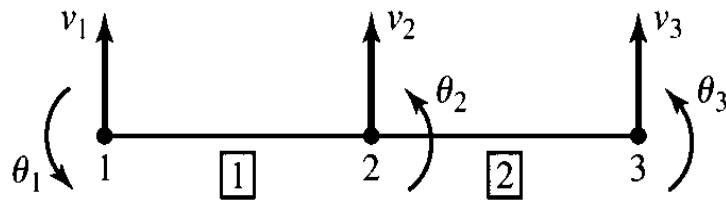
به عنوان مثال برای یک بار یکنواخت با شدت $q(x) = q$ بردار نیروی گرهی معادل پس از انتگرال گیری به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{Bmatrix} F_{1q} \\ M_{1q} \\ F_{2q} \\ M_{2q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

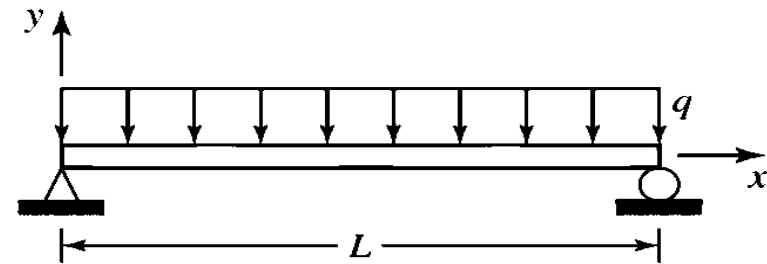


مثال

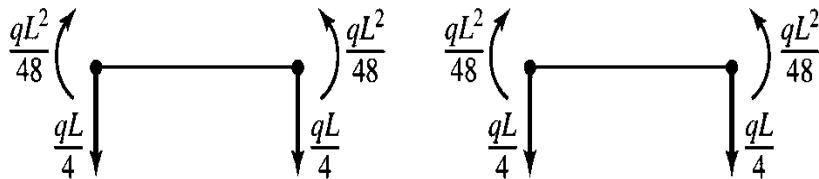
تیر با تکیه گاه های ساده نشان داده شده در شکل (الف) تحت یک بار عرضی یکنواخت قرار دارد. با استفاده از دو المان با طول های برابر و با استفاده از کار نیروهای گرهی معادل، جواب اجزاء محدودی تغییر شکل وسط تیر را به دست آورید و این جواب را با جواب حاصل از تئوری مقدماتی تیر مقایسه کنید.



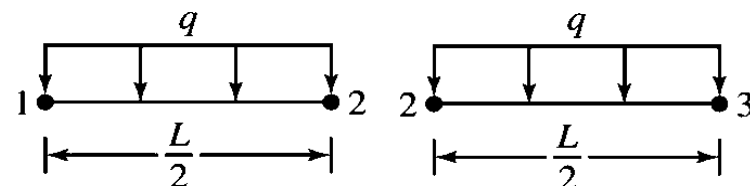
(ب)



(الف)

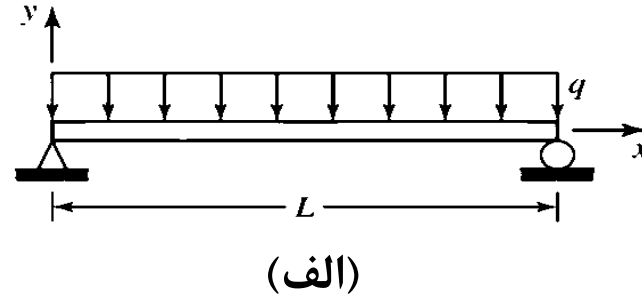
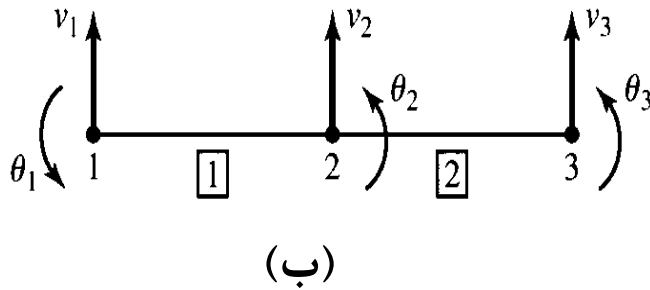


(د)



(ج)

(الف) تیر با بارگذاری یکنواخت (ب) نمادگذاری گره، المان و جابجایی. (ج) بارگذاری المان.
(د) نیروهای گرهی کار معادل

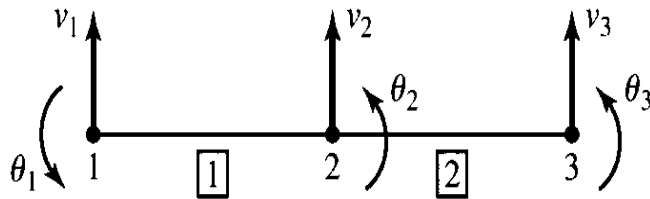


حل

گره ها و المان ها مطابق شکل (ب) شماره گذاری می شوند و شرایط مرزی $v_1 = v_2 = 0$ می باشند. همچنین می توان نشان داد که بدلیل تقارن $\theta_2 = 0$ می باشد. ماتریس های سختی المان ها با هم برابرند و به صورت زیر بیان می شوند

$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = \frac{EI_z}{(L/2)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L/2 & -12 & 6L/2 \\ 6L/2 & 4L^2/4 & -6L/2 & 2L^2/4 \\ -12 & -6L/2 & 12 & -6L/2 \\ 6L/2 & 2L^2/4 & -6L/2 & 2L^2/4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{8EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L \\ 3L & L^2 & -3L & L^2/2 \\ -12 & -3L & 12 & -3L \\ 3L & L^2/2 & -3L & L^2 \end{bmatrix}$$



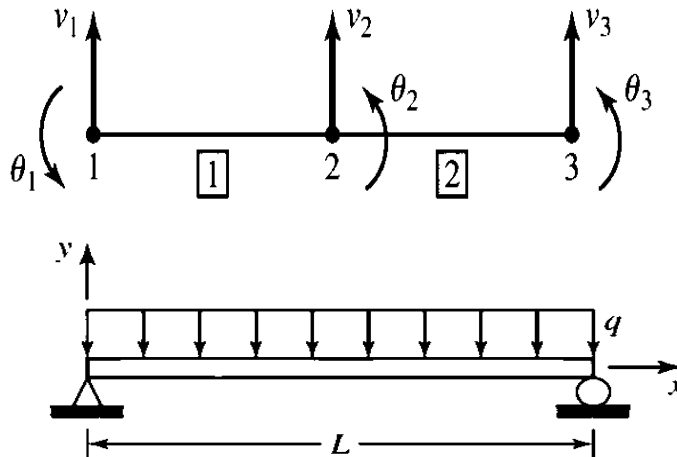
اتصال المان

المان ۲	المان ۱	جابجایی کلی
۰	۱	۱
۰	۲	۲
۱	۳	۳
۲	۴	۴
۳	۰	۵
۴	۰	۶

(در این مثال در محاسبه ماتریس سختی هر المان باید از طول $\frac{L}{2}$ برای هر المان استفاده شود).

ماتریس سختی کل با استفاده از این جدول به صورت زیر مونتاژ می شود.

$$[K] = \frac{8EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L & 0 & 0 \\ 3L & L^2 & -3L & L^2/2 & 0 & 0 \\ -12 & -3L & 24 & 0 & -12 & 3L \\ 3L & L^2/2 & 0 & 2L^2 & -3L & L^2/2 \\ 0 & 0 & -12 & -3L & 12 & -3L \\ 0 & 0 & 3L & L^2/2 & -3L & L^2 \end{bmatrix}$$



$$[K] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-qL}{4} + F_1 \\ \frac{-qL^2}{48} \\ \frac{-qL}{2} \\ 0 \\ \frac{-qL}{4} + F_3 \\ \frac{qL^2}{48} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{8EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} L^2 & -3L & L^2/2 & 0 \\ -3L & 24 & 0 & 3L \\ L^2/2 & 0 & 2L^2 & L^2/2 \\ 0 & 3L & L^2/2 & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-qL^2}{48} \\ \frac{-qL}{2} \\ 0 \\ \frac{qL^2}{48} \end{Bmatrix}$$

با حل همزمان این معادلات، جابجایی ها به صورت زیر به دست می آیند:

$$\theta_1 = -\frac{qL^3}{24EI_z}$$

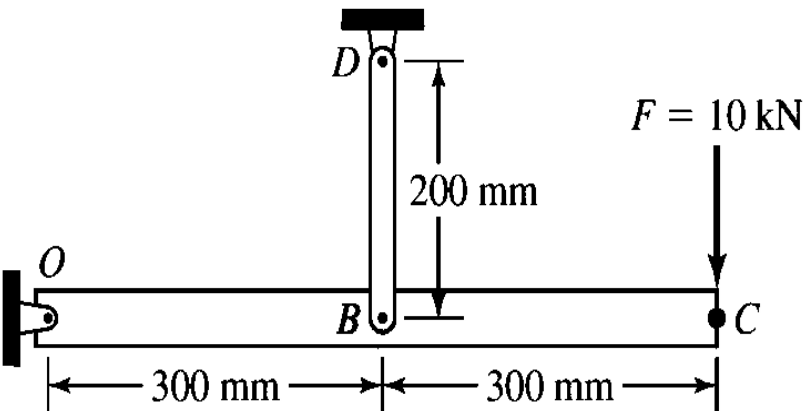
$$\theta_2 = 0$$

$$v_2 = -\frac{5qL^4}{384EI_z}$$

$$\theta_3 = \frac{qL^3}{24EI_z}$$

مثال

در شکل زیر، تیر OC در نقطه O توسط یک اتصال مفصلی و در نقطه B توسط میله الاستیک BD نگهداری می شود، به طوری که میله BD در هر دو انتها به صورت مفصل متصل شده است. با توجه به اعمال نیروی ثابت $F = 10 \text{ kN}$ در C ، تغییر مکان نقطه C و تنش محوری را در عضو BD تعیین کنید.

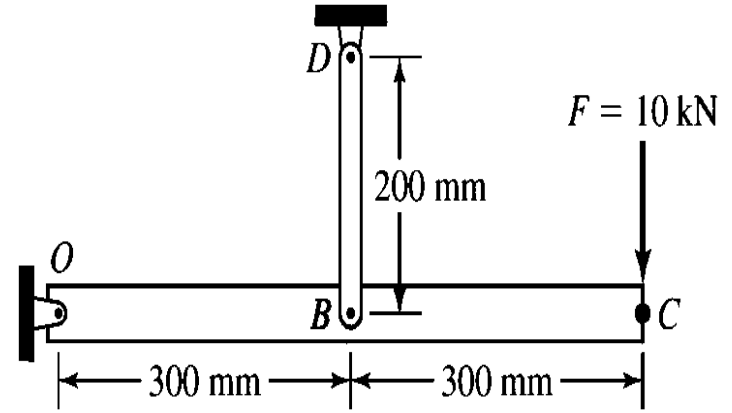
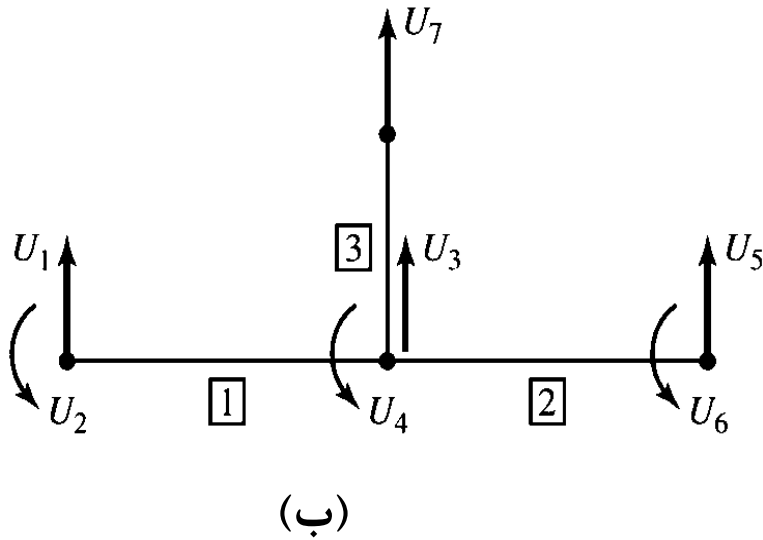


مدول الاستیسیته تیر (فولاد): 207 GPa

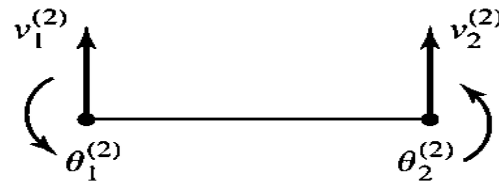
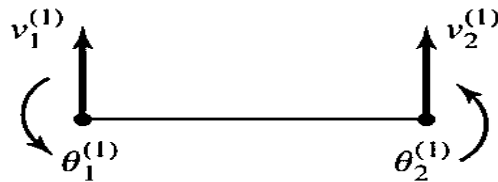
ابعاد سطح مقطع تیر: $40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$

مدول الاستیسیته میله BD (آلومینیوم): 69 GPa

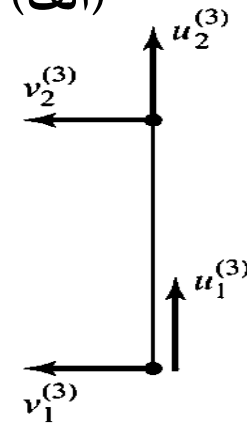
و مساحت سطح مقطع آن: 78.54 mm^2



(الف)

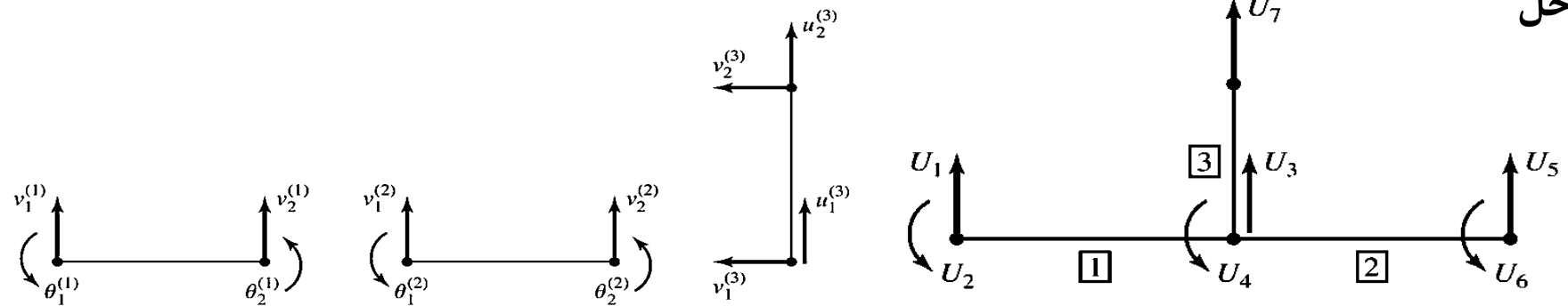


(ج)



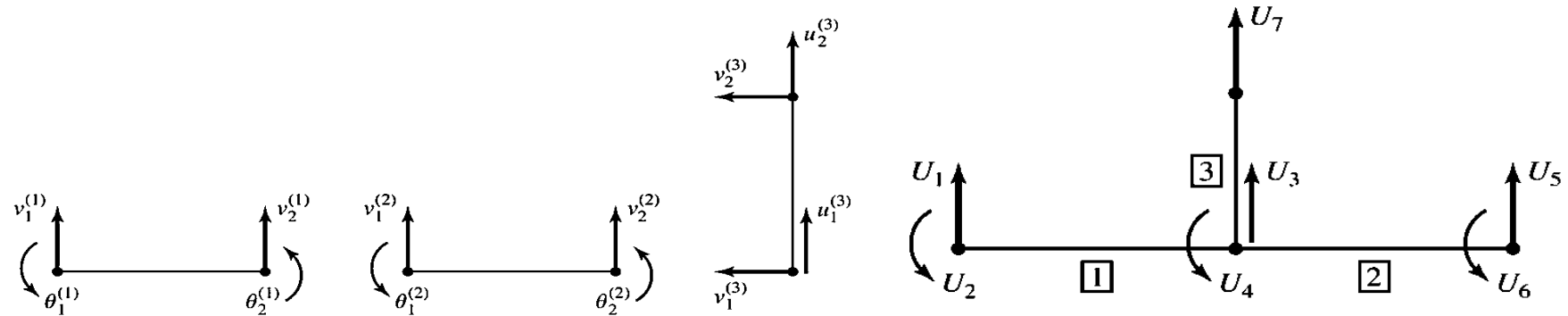
(الف) سازه (ب) دستگاه مختصات کلی و متغیرهای کلی.
(ج) جابجایی های المان ها به صورت مجزا

حل



چیدمان جابجایی ها

المان ۳	المان ۲	المان ۱	شکل (۴-۱۰ ب)	کلی
.	.	$v_1^{(1)}$	U_1	۱
.	.	$\theta_1^{(1)}$	U_2	۲
$u_1^{(3)}$	$v_1^{(2)}$	$v_2^{(1)}$	U_3	۳
.	$\theta_1^{(2)}$	$\theta_2^{(1)}$	U_4	۴
.	$v_2^{(2)}$	.	U_5	۵
.	$\theta_2^{(2)}$	.	U_6	۶
$u_2^{(3)}$	.	.	U_7	۷

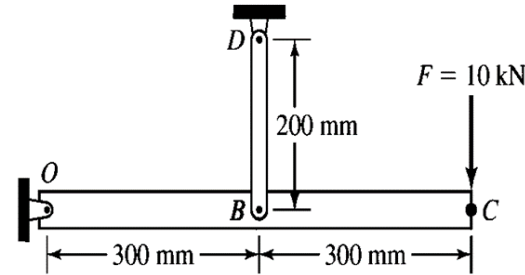
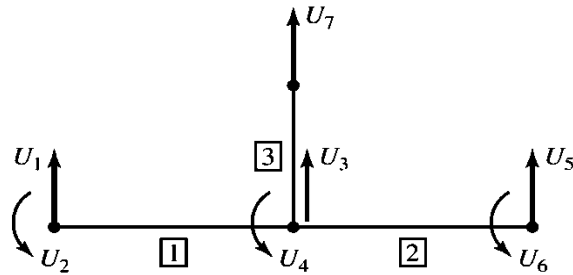


تناظر المان - جابجایی

المان ۳	المان ۲	المان ۱	جابجایی کلی
۰	۰	۱	۱
۰	۰	۲	۲
۱	۱	۳	۳
۰	۲	۴	۴
۰	۳	۰	۵
۰	۴	۰	۶
۳	۰	۰	۷

در این حالت می دانیم که $v_1^{(3)} = v_2^{(3)} = 0$ هستند و این جابجایی ها در روند حل حذف می شوند.

ارتباط بین جابجایی های المان ها در جدول آورده شده است.



برای المان تیر ممان اینرسی حول محور Z برابر است با

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{40(40^3)}{12} = 213333 \text{ mm}^4$$

برای المان های ۱ و ۲:

$$\frac{EI_z}{L^3} = \frac{207(10^3)(213333)}{300^3} = 1635.6 \text{ N/mm}$$

بنابراین ماتریس های سختی المان های ۱ و ۲ عبارتند از :

$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = 1635.6 \begin{bmatrix} 12 & 1800 & -12 & 1800 \\ 1800 & 360000 & -1800 & 180000 \\ -12 & -1800 & 12 & -1800 \\ 1800 & 180000 & -1800 & 360000 \end{bmatrix}$$

$$\frac{AE}{L} = \frac{78.54(69)(10^3)}{200} = 27096 \text{ N/mm}$$

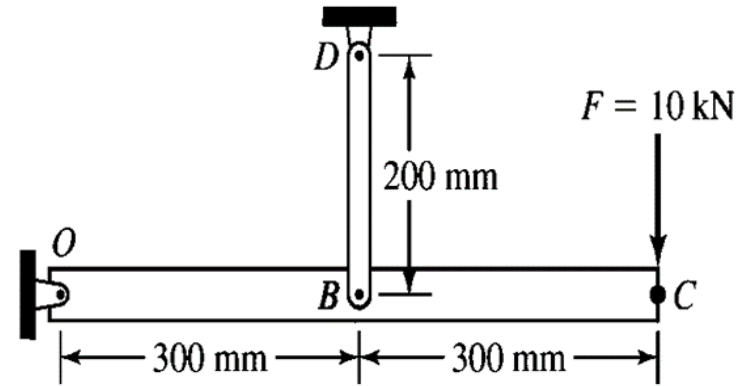
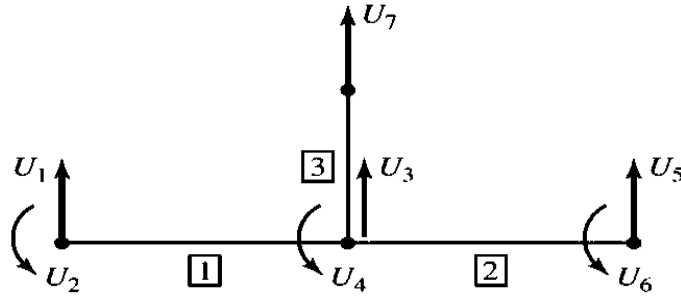
و برای المان ۳

$$[k^{(3)}] = 27096 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس سختی المان ۳ برابر است با

ماتریس سختی کل

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
.	.	.	۲.۹۴۴×۱۰^۶	-۱۹۶۲۷.۲	۲.۹۴۴×۱۰^۶	۱۹۶۲۷.۲	۱
.	.	.	۲.۹۴۴×۱۰^۶	-۲.۹۴۴×۱۰^۶	۵.۸۸۸×۱۰^۸	۲.۹۴۴×۱۰^۶	۲
-۲۷۰.۹۶	۲.۹۴۴×۱۰^۶	-۱۹۶۲۷.۲	.	۶۶۳۵۰.۴	-۲.۹۴۴×۱۰^۶	-۱۹۶۲۷.۲	۳
.	۲.۹۴۴×۱۰^۶	-۲.۹۴۴×۱۰^۶	۱۱.۷۸×۱۰^۸	.	۲.۹۴۴×۱۰^۸	۲.۹۴۴×۱۰^۶	۴
.	-۲.۹۴۴×۱۰^۶	۱۹۶۲۷.۲	-۲.۹۴۴×۱۰^۶	-۱۹۶۲۷.۲	.	.	۵
.	۵.۸۸۸×۱۰^۸	-۲.۹۴۴×۱۰^۶	۲.۹۴۴×۱۰^۶	۲.۹۴۴×۱۰^۶	.	.	۶
۲۷۰.۹۶	.	.	.	-۲۷۰.۹۶	.	.	۷



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ 0 \\ R_4 \end{Bmatrix}$$

که در اینجا از R برای نشان دادن نیروی عکس العمل استفاده شده است.
با اعمال شرایط مقید و حل دستگاه 5×5 حاصل، نتایج به صورت زیر به دست می آیند:

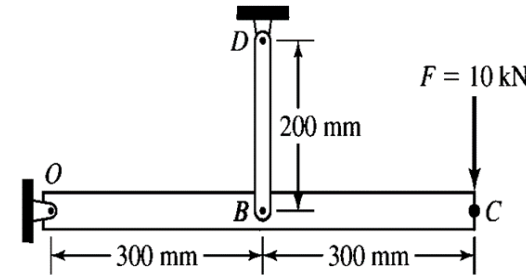
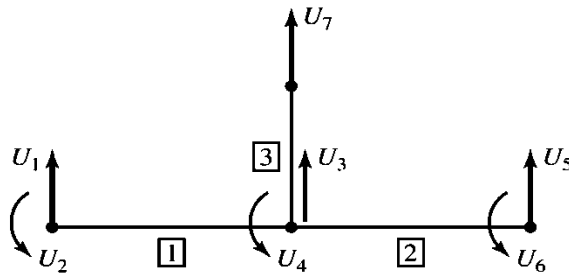
$$\theta_1 = 9.3638(10^{-4}) \text{ rad}$$

$$v_2 = -0.73811 \text{ mm}$$

$$\theta_2 = -0.0092538 \text{ rad}$$

$$v_3 = -5.5523 \text{ mm}$$

$$\theta_3 = -0.019444 \text{ rad}$$

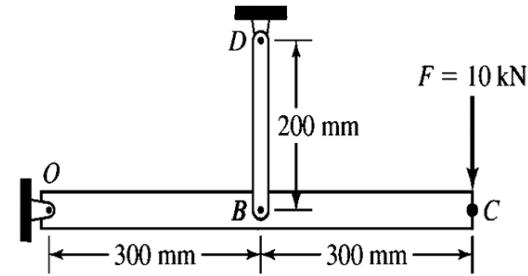
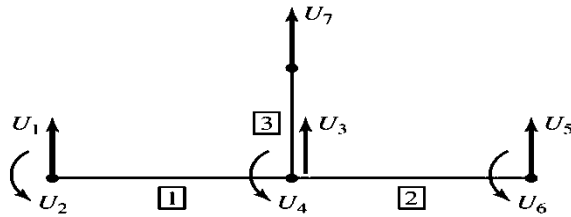


(توجه کنید که عمداً ارقام اعشاری زیادی بکار رفته و از گرد کردن آنها اجتناب شده است، زیرا گرد کردن در این مرحله در محاسبات ثانویه ایجاد خطا می کند.) برای به دست آوردن تنش محوری در عضو BD از رابطه ذیل با $\theta^{(3)} = \frac{\pi}{2}$ استفاده می شود.

$$\sigma^{(e)} = E \varepsilon^{(e)} = E \frac{du^{(e)}(x)}{dx} = E \frac{d^{(e)}}{dx} [N_1(x) \quad N_2(x)] [R] \begin{Bmatrix} U_1^{(e)} \\ U_2^{(e)} \\ U_3^{(e)} \\ U_4^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{BD} = 69(10^3) \begin{bmatrix} -\frac{1}{200} & \frac{1}{200} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.7381 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 254.6 \text{ MPa}$$

مقدار مثبت نشان می دهد که عضو مورد نظر تحت تنش کششی قرار دارد.



نیروهای عکس العمل با جایگذاری جابجایی های محاسبه شده در معادلات اول و هفتم (معادلات مقید)

$$R_1 = 2.944(10^6) \left[9.3638(10^{-4}) \right] - 19627.2(-0.73811)$$

$$+ 2.944(10^6)(-0.0092538) \approx -10000 \text{ N}$$

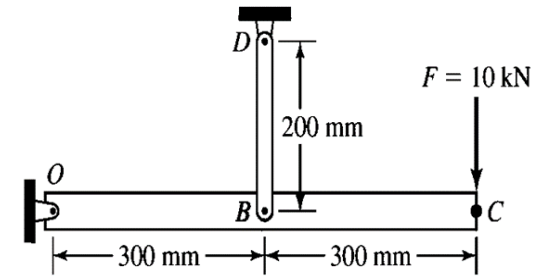
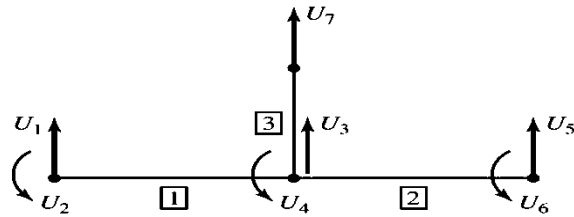
$$R_4 = -27096(-0.73811) + 27096(0) = 20000 \text{ N}$$

با صرف نظر از خطای عددی که وابسته به دقت بکار رفته در مثال است، سیستم در تعادل می باشد. البته می توان با ارزیابی تعادل لنگر حول گره سمت چپ و فقط با استفاده از اصول استاتیک، نیرو را در گره ۳ برابر 20000 N و تنش محوری را توسط رابطه $\sigma = \frac{F}{A}$ برابر با 254.6 MPa محاسبه کرد.

تنش های خمشی در گره های ۱ و ۲ در المان های خمشی توسط روابط مربوط محاسبه می شوند. ضمناً

$$y_{\max, \min} = 20 \text{ mm} \text{ می باشد.}$$

توجه شود که برای سطح مقطع مربع،



$$\sigma_x^{(1)}(x=0) = \pm 20(207)(10^3) \left[\frac{6}{300^2}(-0.738 - 0) - \frac{2}{300}(-(2)0.00093 - 0.0092) \right] \quad \text{لذا برای المان ۱:}$$

$$\approx 0$$

این تنش مربوط به گره ۱ در المان ۱ می باشد. دقت شود که چون گره ۱ یک اتصال مفصلی است و لنگر خمشی را تحمل نمی کند، تنش محاسبه شده در این گره باید دقیقاً صفر شود.

برای گره ۲ در المان ۱ تنش به صورت زیر به دست می آید

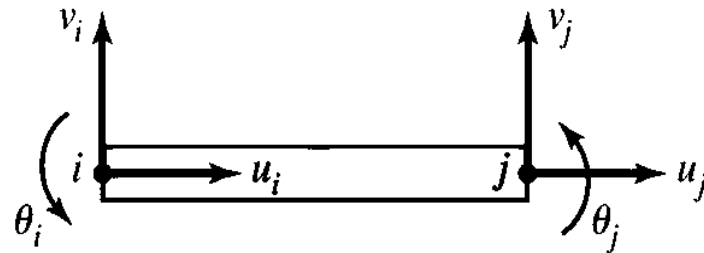
$$\sigma_x^{(1)}(x=L) = \pm 20(207)(10^3) \left[\frac{6}{300^2}(0 + 0.738) + \frac{2}{300}(-(2)0.0092 - 0.0093) \right]$$

$$\approx \pm 281.3 \text{ MPa}$$

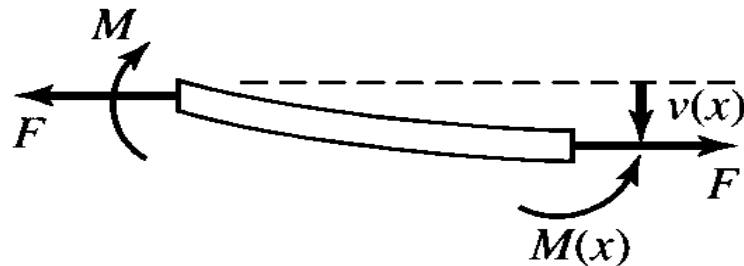
$$\sigma_x^{(2)}(x=L) = \pm 20(207)(10^3) \times \left[\frac{6}{300^2}(-0.73811 + 5.5523) + \frac{2}{300}(-(2)0.019444 - 0.009538) \right]$$

$$\approx 0 \text{ MPa}$$

المان تیرستون

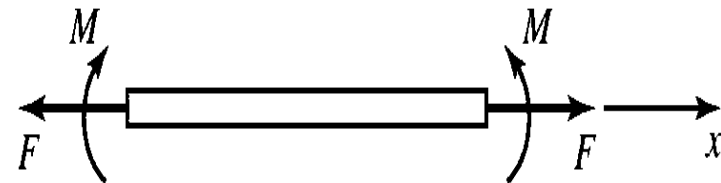


جابجایی های گرهی المان با سختی محوری



$$M(x) = M - Fv(x)$$

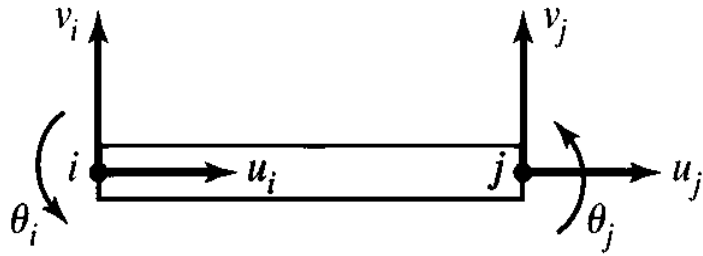
(ب)



(الف)

(الف) تیرستون تحت لنگر خمشی و بار محوری. (ب) برشی از تیر به منظور تشریح چگونگی کاهش لنگر خمشی به علت وجود بار محوری کششی

المان تیرستون



می توان به طور ساده برای به دست آوردن ماتریس 6×6 سختی المان یک المان خمشی به همراه بارگذاری محوری، ماتریس سختی المان میله را با ماتریس سختی المان خمشی به صورت زیر جمع کرد

$$[k_{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & \frac{-AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-AE}{L} & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{-6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & \frac{-6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

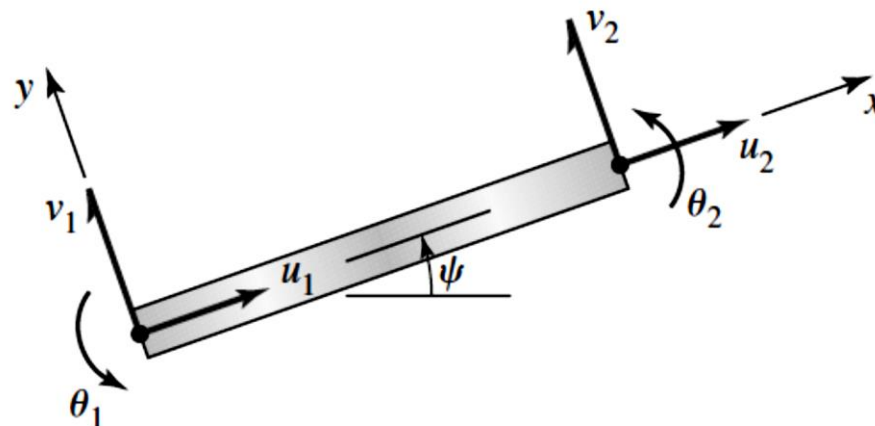
المان تیرستون

ماتریس بالا در فرم ساده تر به شکل زیر می باشد:

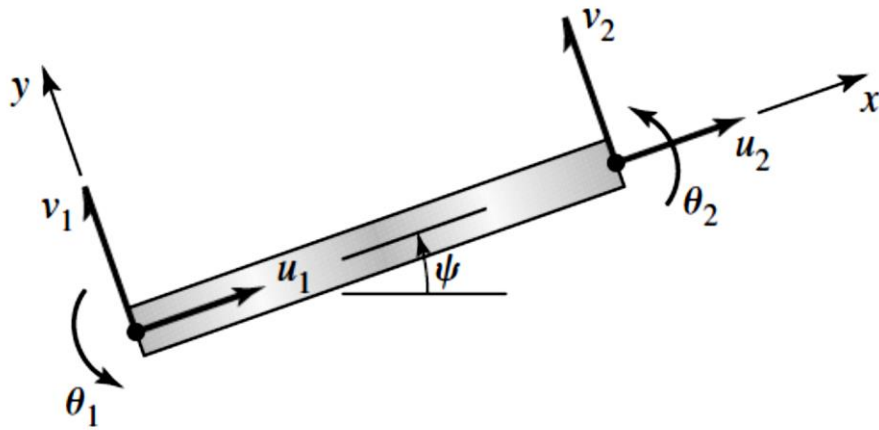
$$[k_{(e)}] = \begin{bmatrix} [k_{\text{axial}}] & [0] \\ [0] & [k_{\text{flexure}}] \end{bmatrix}$$

که یک برهم نهی غیر درگیر متشکل از سختی محوری و سختی خمشی است. اما با نظم جدید درجات آزادی محلی داریم:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



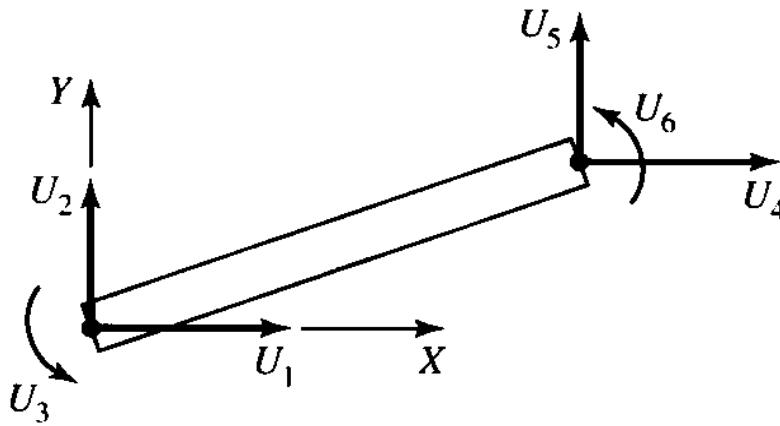
المان تیرستون



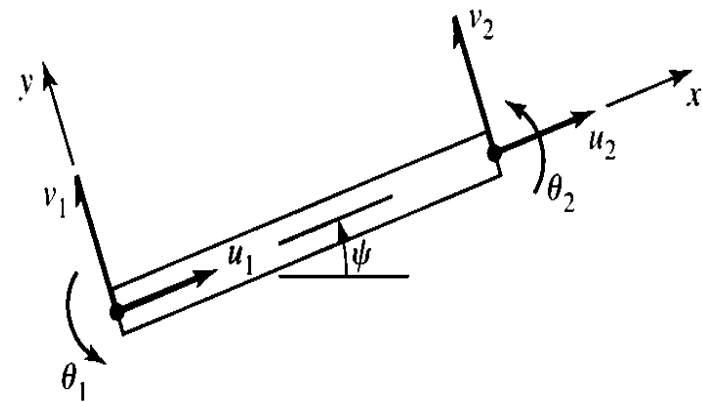
ماتریس سختی المان در دستگاه مختصات محلی برابر می شود با:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

انتقال المان



(ب)



(الف)

(الف) جابجایی های گرهی در دستگاه مختصات المان. (ب) جابجایی -

های گرهی در دستگاه مختصات کل

انتقال المان

با استفاده از شکل، جابجایی های المانی را می توان بر حسب جابجایی های کلی به صورت زیر نوشت.

$$u_1 = U_1 \cos \psi + U_2 \sin \psi$$

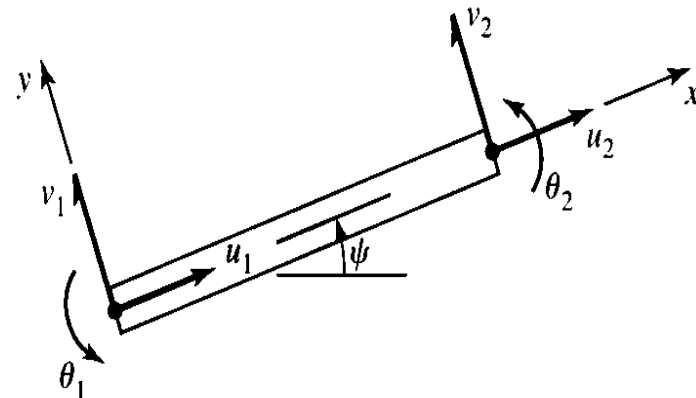
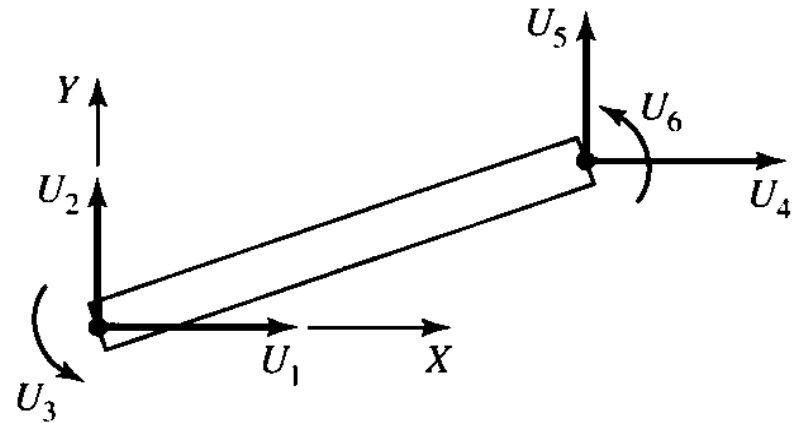
$$v_1 = -U_1 \sin \psi + U_2 \cos \psi$$

$$\theta_1 = U_3$$

$$u_2 = U_4 \cos \psi + U_5 \sin \psi$$

$$v_2 = -U_4 \sin \psi + U_5 \cos \psi$$

$$\theta_2 = U_6$$



انتقال المان

در فرم ماتریسی:

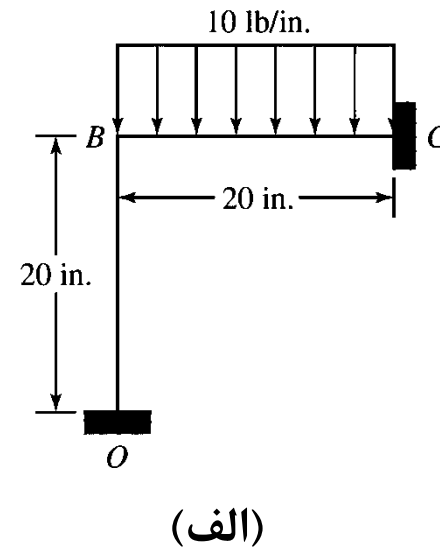
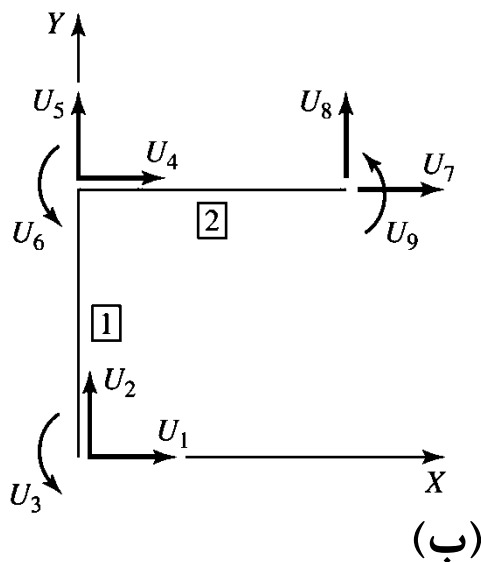
$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = [R] \{U\}$$

که $[R]$ ماتریس انتقال می باشد، به طوری که جابجایی های المانی را به جابجایی های کلی مرتبط می سازد. به طریق کاملاً مشابه با قبل، به آسانی می توان نشان داد که ماتریس 6×6 سختی المان در سیستم کلی به صورت زیر می باشد

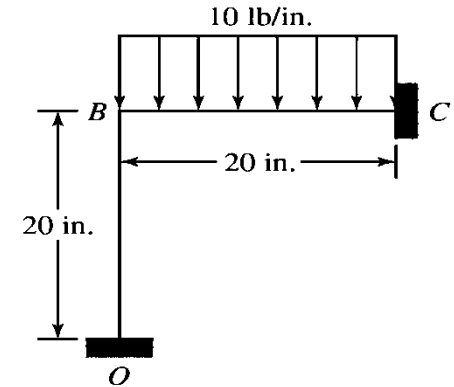
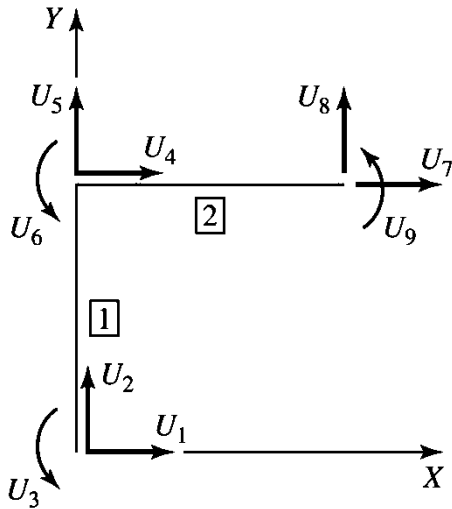
$$[K_e] = [R]^T [k_e] [R]$$

مثال

قاب نشان داده شده در شکل (الف) مرکب از دو تیر یکسان با سطح مقطع مربع به ضلع 1 in و مدول الاستیسیته $10 \times 10^6 \text{ psi}$ تکیه گاه ها در O و C کاملاً گیردار در نظر گرفته شده اند. مطابق شکل تیر افقی تحت نیروی گسترده یکنواختی به شدت 10 lb/in قرار دارد. از دو المان تیر- ستون برای محاسبه جابجایی و چرخش در B استفاده کنید.



(الف) قاب مربوط به مثال. (ب) دستگاه مختصات کل و شماره گذاری جابجایی.



حل

با استفاده از داده های تعیین شده، مساحت سطح مقطع برابر است با:

$$A = 1(1) = 1 \text{ in.}^2$$

و ممان اینرسی حول محور Z به صورت زیر حاصل می گردد:

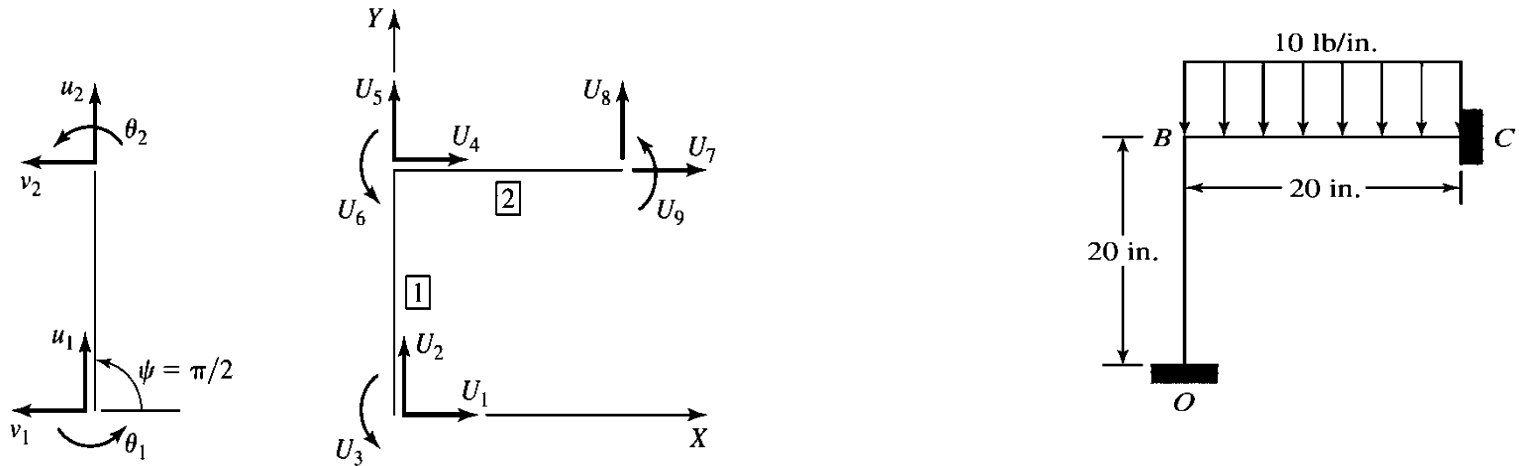
$$I_z = bh^3 / 12 = 1/12 = 0.083 \text{ in.}^4$$

$$AE / L = 1(10 \times 10^6) / 20 = (5 \times 10^5) \text{ lb / in.}$$

لذا پارامتر سختی محوری برابر است با:

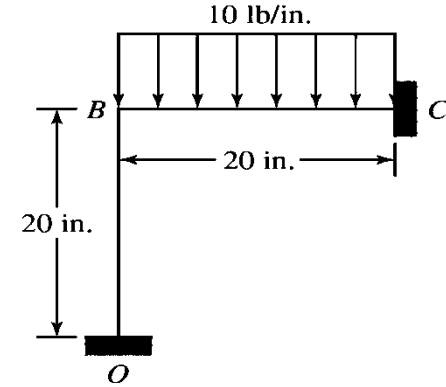
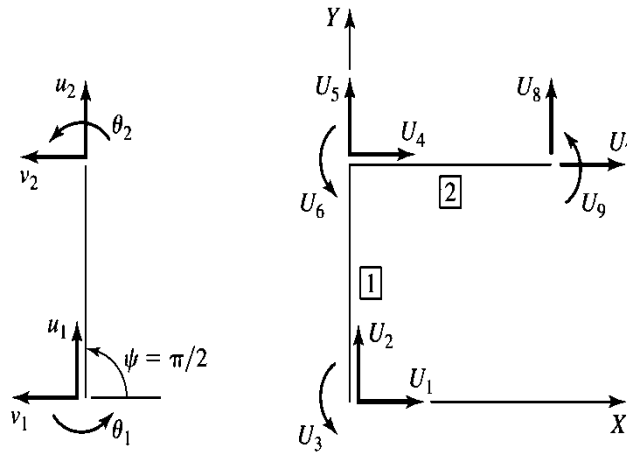
و پارامتر سختی خمشی نیز به صورت زیر حاصل می شود.

$$EI_z / L^3 = 10 \times 10^6 (0.083) / 20^3 = 104.2 \text{ lb / in.}$$



عضو OB به عنوان المان ۱ و عضو BC به عنوان المان ۲ نامگذاری می شوند، ماتریس های سختی در سیستم مختصات المانی یکسان هستند و به صورت زیر بیان می شوند

$$[k^{(1)}] = [k^{(2)}] = \begin{bmatrix} 5(10^5) & 0 & 0 & -5(10^5) & 0 & 0 \\ 0 & 1250.4 & 12504 & 0 & -1250.4 & 12504 \\ 0 & 12504 & 166720 & 0 & -12504 & 83360 \\ -5(10^5) & 0 & 0 & 5(10^5) & 0 & 0 \\ 0 & -1250.4 & -12504 & 0 & 1250.4 & -12504 \\ 0 & 12504 & 83360 & 0 & -12504 & 166720 \end{bmatrix}$$

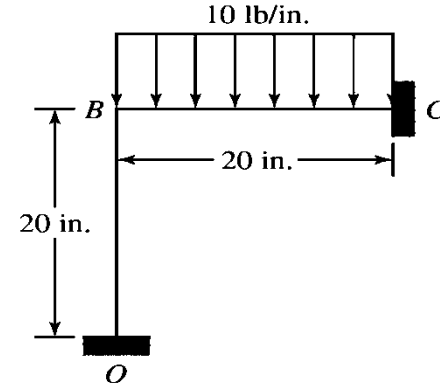
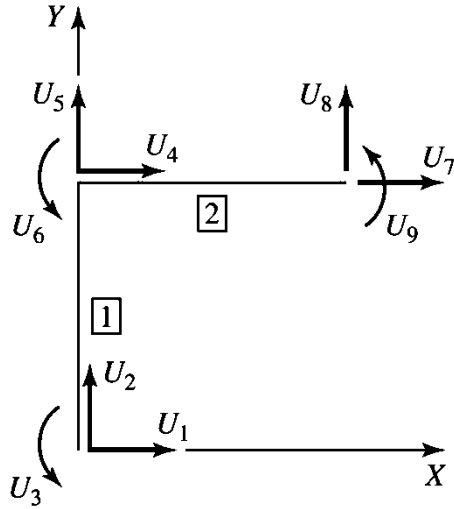


با انتخاب سیستم مختصات کلی و شماره‌ی جابجایی‌ها مطابق شکل (۴-۱۴ب)، مشاهده می‌شود که المان ۲ نیاز به انتقال ندارد، زیرا سیستم مختصات المانی آن بر سیستم مختصات کلی منطبق است. در

حالی که مطابق شکل (ج)، المان ۱ نیاز به انتقال دارد. با استفاده از $\Psi = \frac{\pi}{2}$

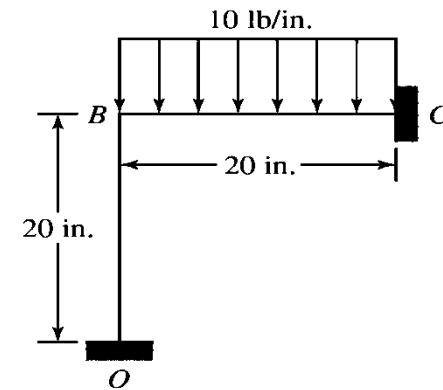
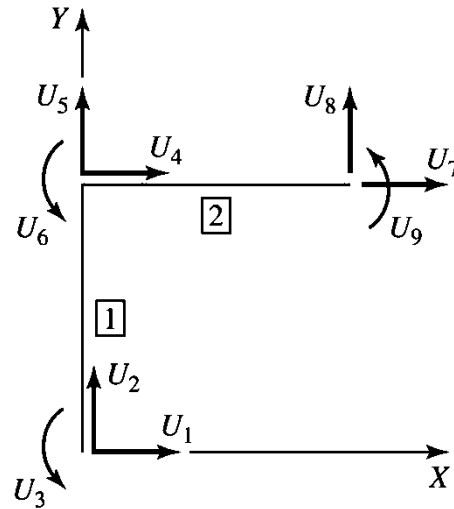
نتیجه می‌شود که:

$$[K^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1250.4 & 0 & -12504 & -1250.4 & 0 & -12504 \\ 0 & 5(10^5) & 0 & 0 & -5(10^5) & 0 \\ -12504 & 0 & 166720 & 12504 & 0 & 83360 \\ -1250.4 & 0 & 12504 & 1250.4 & 0 & 12504 \\ 0 & -5(10^5) & 0 & 0 & 5(10^5) & 0 \\ -12504 & 0 & 83360 & 12504 & 0 & 166720 \end{bmatrix}$$

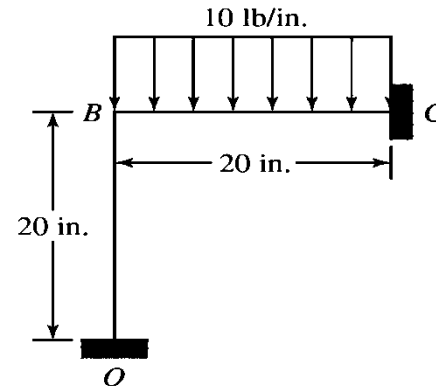
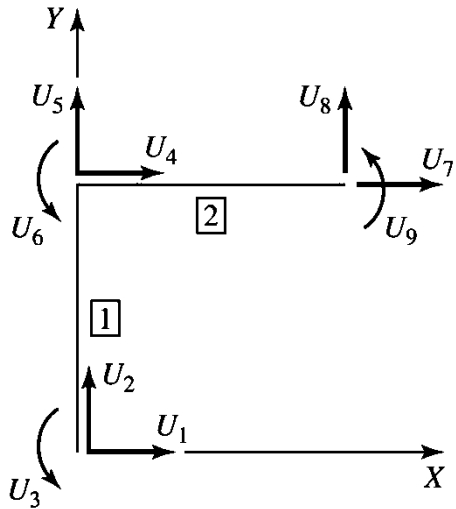


تناظر جابجایی

المان ۲	المان ۱	کلی
۰	۱	۱
۰	۲	۲
۰	۳	۳
۱	۴	۴
۲	۵	۵
۳	۶	۶
۴	۰	۷
۵	۰	۸
۶	۰	۹

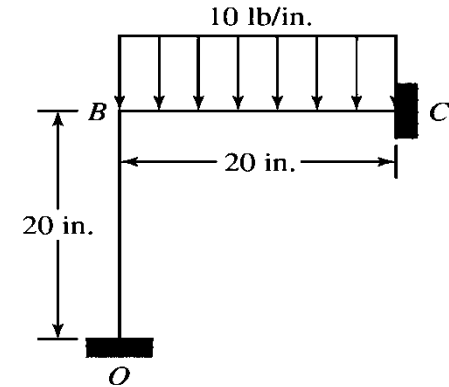
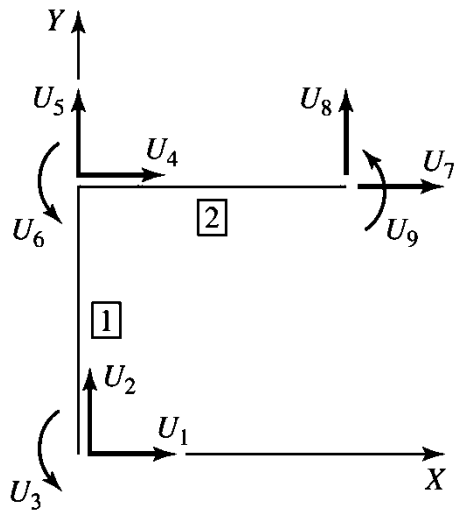


$$[K] = \begin{bmatrix} 1250.4 & 0 & -12504 & -1250.4 & 0 & -12504 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 500000 & 0 & 0 & -500000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12504 & 0 & 166720 & 12504 & 0 & 833360 & 0 & 0 & 0 \\ -1250.4 & 0 & 12504 & 501250.4 & 0 & 12504 & -500000 & 0 & 0 \\ 0 & -500000 & 0 & 0 & 501250.4 & 12504 & 0 & -1250.4 & 12504 \\ -12504 & 0 & 83360 & 12504 & 12504 & 333440 & 0 & -12504 & 83360 \\ 0 & 0 & 0 & -500000 & 0 & 0 & 500000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1250.4 & -12504 & 0 & 1250.4 & -12504 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12504 & 83360 & 0 & -12504 & 166720 \end{bmatrix}$$



با استفاده از ماتریس سختی سیستم، دستگاه معادلات مونتاژ شده به صورت زیر حاصل می شود

$$[K] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{X1} \\ R_{Y1} \\ M_{R1} \\ 0 \\ -100 \\ -333.3 \\ R_{X3} \\ R_{Y3} - 100 \\ M_{R3} + 333.3 \end{Bmatrix}$$



با توجه به جابجایی های مقید $U_1 = U_2 = U_3 = U_7 = U_8 = U_9 = 0$ ، نیروها در گره های ۱ و ۳ به عنوان مولفه های

عکس العمل بحساب می آیند. با لحاظ کردن شرایط مقید، دستگاه معادلات زیر برای جابجایی های فعال

$$\begin{bmatrix} 501250.4 & 0 & 12504 \\ 0 & 501250.4 & 12504 \\ 12504 & 12504 & 333440 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ -333.3 \end{Bmatrix}$$

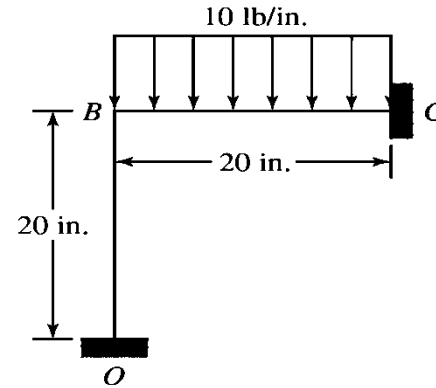
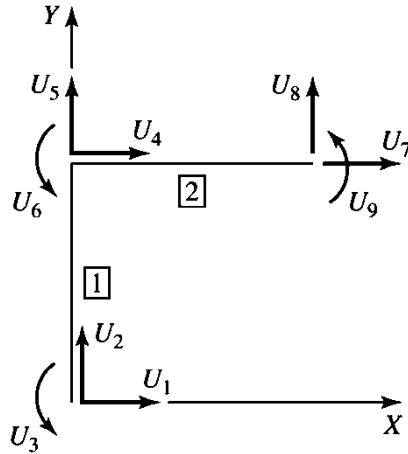
حاصل می شود:

با حل همزمان این معادلات مقادیر جابجایی ها به صورت زیر به دست می آیند

$$U_4 = 2.47974(10^{-5}) \text{ in.}$$

$$U_5 = -1.74704(10^{-4}) \text{ in.}$$

$$U_6 = -9.94058(10^{-4}) \text{ rad}$$



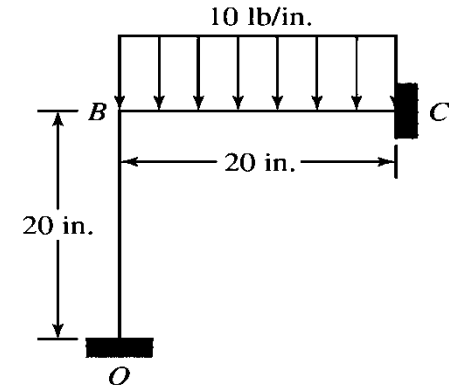
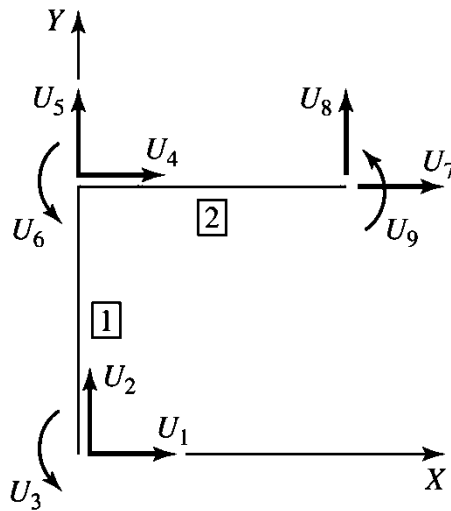
مطابق معمول مولفه های عکس العمل را می توان با جایگذاری جابجایی های محاسبه شده در شش معادله مقید محاسبه نمود.

برای المان تیر با قابلیت محوری، در محاسبه تنش باید بر هم نهی آثار تنش خمشی و تنش محوری مستقیم

را در نظر گرفت. به عنوان مثال در المان ۱ برای محاسبه جابجایی المان از رابطه مربوط با $\Psi = \frac{\pi}{2}$

به صورت زیر استفاده می شود:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.74704(10^{-4}) \\ -2.47974(10^{-5}) \\ -9.94058(10^{-4}) \end{Bmatrix}$$



تنش خمشی در گره های ۱ و ۲ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\sigma_x(x=0) = \pm 0.5(10)(10^6) \left[\frac{6}{20^2} (-2.47974)(10^{-5}) - \frac{2}{20} (-9.94058)(10^{-4}) \right]$$

$$= \pm 495.2 \text{ psi}$$

$$\sigma_x(x=L) = \pm 0.5(10)(10^6) \left[\frac{6}{20^2} (2.47974)(10^{-5}) + \frac{2}{20} (2)(-9.94058)(10^{-4}) \right]$$

$$= \pm 992.2 \text{ psi}$$

و تنش محوری برابر است با

$$\sigma_{axial} = 10(10^6) \frac{-1.74704(10^{-4})}{20} = -87.35 \text{ psi}$$

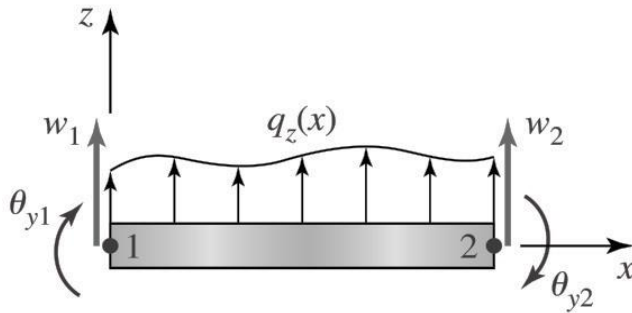
بنابراین، بیشترین مقدار تنش در گره ۲ رخ می دهد، زیرا در این گره تنش محوری فشاری با قسمت

فشاری تنش خمشی جمع شده و تنش زیر حاصل می شود:

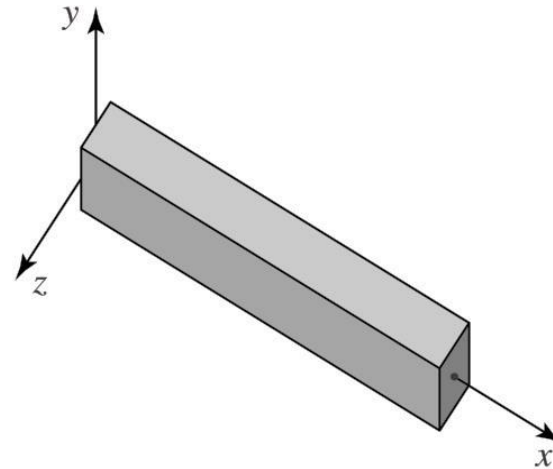
$$\sigma = 1079.6 \text{ psi} \quad (\text{فشاری})$$

المان تیر سه بعدی کلی

$$[k_e]_{xz} = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



(ب)

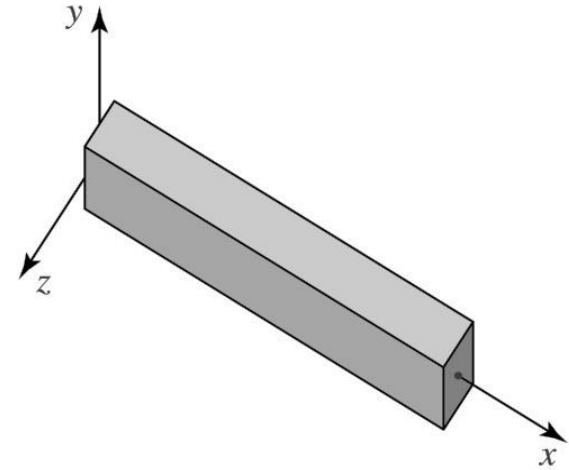


(الف)

(الف) المان تیر سه بعدی. (ب) جابجایی‌های گرهی در صفحه xz المان

المان تیر سه بعدی کلی

$$\begin{bmatrix} [k_{\text{axial}}] & [0] & [0] \\ [0] & [k_{\text{bending}}]_{xy} & [0] \\ [0] & [0] & [k_{\text{bending}}]_{xz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{x2} \\ f_{y1} \\ M_{z1} \\ f_{y2} \\ M_{z1} \\ f_{z1} \\ M_{y1} \\ f_{z2} \\ M_{y2} \end{Bmatrix}$$



که ماتریس 10×10 سختی المان را می‌توان به فرم مختصر شده‌ی زیر نوشت:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} [k_{\text{axial}}] & [0] & [0] \\ [0] & [k_{\text{bending}}]_{xy} & [0] \\ [0] & [0] & [k_{\text{bending}}]_{xz} \end{bmatrix}$$

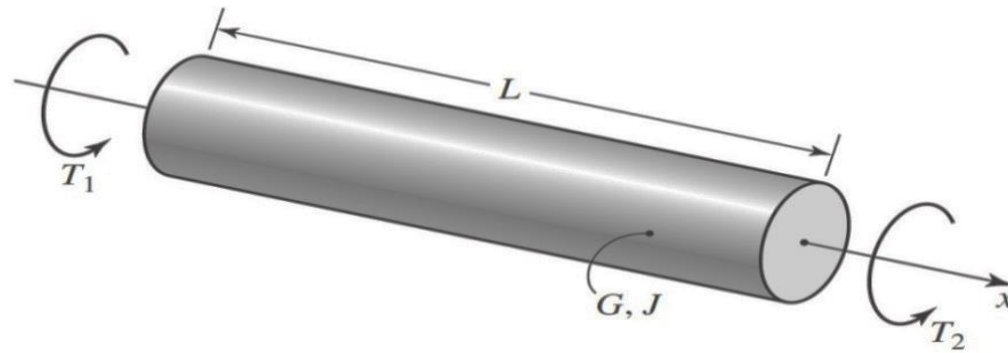
المان تیر سه بعدی کلی

نیروهای گرهی معادل متناظر با بار گسترده، بر اساس کار معادل محاسبه می شوند.

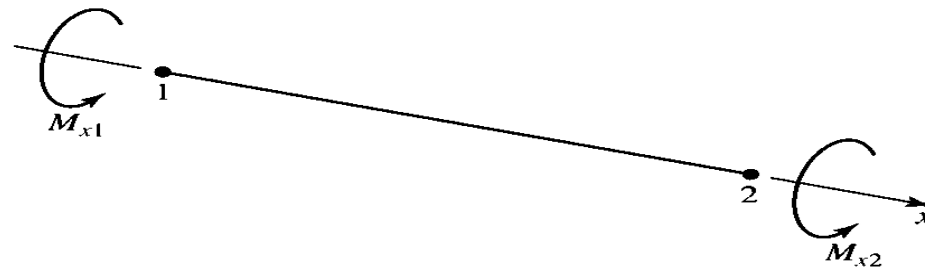
برای بار گسترده یکنواخت با شدت $q_z(x) = q_z$ بردار نیروهای گرهی به صورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} f_{qz1} \\ M_{qz1} \\ f_{qz2} \\ M_{qz2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_z L}{2} \\ -\frac{q_z L^2}{12} \\ \frac{q_z L}{2} \\ \frac{q_z L^2}{12} \end{Bmatrix}$$

المان تیر سه بعدی کلی



(الف)



(ب)

(الف) استوانه مدور تحت پیچش. (ب) علامت گذاری المان محدود پیچشی

المان تیر سه بعدی کلی

$$\phi = \frac{T}{JG}$$

که در آن J ممان اینرسی قطبی سطح مقطع و G مدول برشی مصالح می باشد.

چون زاویه پیچش در طول واحد ثابت است، زاویه پیچش کل این المان را می توان بر حسب پیچش ها و گشتاورهای پیچشی گرهی به صورت زیر بیان کرد.

$$\theta_{x2} - \theta_{x1} = \frac{TL}{JG}$$

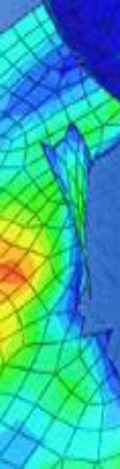
یا

$$T = \frac{JG}{L} (\theta_{x2} - \theta_{x1}) = k_T (\theta_{x2} - \theta_{x1}) \quad (1)$$

با مقایسه رابطه (۱) با رابطه المان فنر الاستیک خطی و در نظر گرفتن شرط تعادل

$M_{x1} + M_{x2} = 0$ معادلات تعادل المان به طور مستقیم به صورت زیر حاصل می شوند.

$$\frac{JG}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{x2} \end{Bmatrix}$$



المان تیر سه بعدی کلی

$$[k_{\text{torsion}}] = \frac{JG}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

قابل ذکر است که روابط فوق تنها برای سطح مقطع مدور کاربرد دارند و برای دیگر سطح مقطع های سازه ای رایج از سختی پیچشی معادل $\frac{J_{eq} G}{L}$ استفاده می شود.

این سختی معادل را می توان از جداول سازه ای استاندارد یا متون مقاومت مصالح به دست آورد.

المان تیر سه بعدی کلی

$$\begin{bmatrix} [k_{axial}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [k_{bending}]_{xy} & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [k_{bending}]_{xz} & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [k_{torsion}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \\ \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{x2} \\ f_{y1} \\ M_{z2} \\ f_{y2} \\ M_{z2} \\ f_{z1} \\ M_{y1} \\ f_{z2} \\ M_{y2} \\ M_{x1} \\ M_{x2} \end{Bmatrix}$$